apl. Prof. Dr.-Ing. habil. Detlef AIGNER

Iterationsfreie Lösung der Bernoulli-Gleichung

Neuer Lösungsansatz zur Ermittlung der Unterwasserbedingungen an einem überströmten Wehr.

Überfallströmung an der Talsperre Leibis-Lichte zum Probestau im April 2010 Bild 1 Foto: Aigner

Bei der Planung von Hochwasserentlastungsanlagen oder Wehren ist es für die hydraulische Berechnung der Energieumwandlung, der Anpassung an die Unterwasserbedingungen und der Festlegung von konstruktiven Maßnahmen erforderlich, die Geschwindigkeit v_1 und Wassertiefe h_1 nach dem Überfall zu bestimmen. Wegen der gekoppelten Abhängigkeit zwischen diesen beiden Größen aus der Energiegleichung und der Kontinuität der Wasserbewegung und der daraus ableitbaren Gleichung dritten Grades sind bisher iterative Lösungen üblich. Eine Möglichkeit der direkten Berechnung unter Berücksichtigung der hydraulischen Verluste wird hier vorgestellt.

Bisherige Lösung

Die im Bild 2 dargestellten Schnitte durch ein typisches Überfallprofil zeigen den Gleichungsansatz für die ideale (verlustfreie) Überströmung (links) und die reale Überströmung (rechts). Die bisherige Lösung der Energiegleichung, sowohl für den idealen als auch den realen Fall, sieht die überschlägige Berechnung der Geschwindigkeit v_1 nach dem Überfall aus der zur Verfügung stehenden Druckhöhe h_0 bzw. Energiehöhe h_E vor.

$$v_1 \cong \sqrt{2g \cdot h_0} \tag{1}$$

Aus dem gegebenen oder mit Hilfe einer vorgegebenen Überfallhöhe $h_ü$ berechneten spezifischen Abfluss

$$q = Q/b = const$$

und der Kontinuitätsbedingung ergibt sich die Wassertiefe h_1 nach dem Wehr zu:

$$h_1 = \frac{q}{v_1} \tag{2}$$

Außerdem ergibt sich aus dem Abfluss die Zuflussgeschwindigkeit v_0 zum Wehr und daraus die zur Verfügung stehende Energiehöhe h_E:

$$h_E = h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + (h_V) \tag{3}$$

Diese muss auch für die Energiehöhe nach dem Wehr gelten, ob nun ohne oder mit einer angenommenen oder geschätzten Verlusthöhe h_V. Die Verlusthöhe wird dabei meist als Verlustbeiwert ζ multipliziert mit der Geschwindigkeitshöhe nach dem Wehr

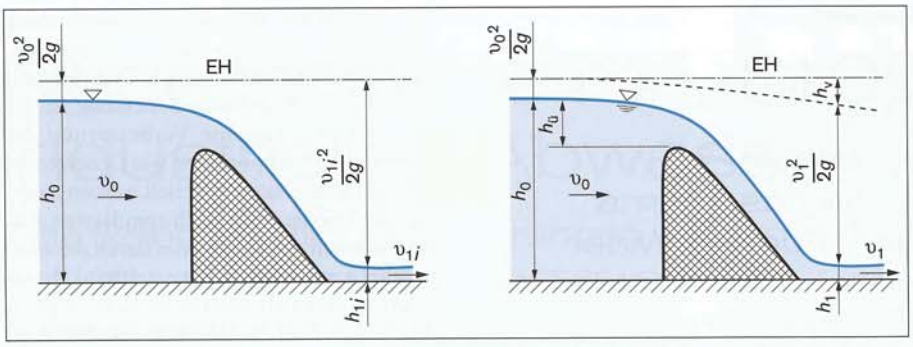
$$h_V = \zeta \cdot \frac{v_1^2}{2g} \tag{4}$$

Es erfolgt also solange eine Überprüfung und anschließende Korrektur über die Energiegleichung und die Kontinuitätsbedingung, bis eine ausreichende Genauigkeit erreicht ist.

Ermittlung des Energieverlustbeiwertes

Die Energieverluste bei der Überströmung eines festen Wehres mit Neigungen zwischen 1:0,6 bis 1:0,8 wurden von Peterka (1978) /2/ untersucht und vorgestellt und sind als Diagramm mit metrischen Einheiten auch in Bollrich (2013) /1/ zu finden. Peterka hat einen Beiwert m bestimmt, der das Verhältnis von realer zu theoretischer Geschwindigkeit unter Vernachlässigung der Zulaufgeschwindigkeit v_0 definierte. Die von Peterka angegebenen Beiwerte lassen sich sehr gut in einer einzigen Kurve im Diagramm (Bild 3) zusammenfassen. Der Energieverlust ist natürlich von vielen Einflüssen abhängig und wird vor allem von der Rauigkeit des Überfallprofils und der Lufteinmischung bestimmt.

Die von Peterka untersuchten Oberflächen stellen übliche Betonoberflächen dar und seine Ergebnisse sind deshalb vor allem zur Abschätzung der Geschwindigkeit v_1 nach dem Wehr geeignet.



Überfallströmung, links: ideale, verlustfreie Strömung, rechts: reale Strömung Bild 2

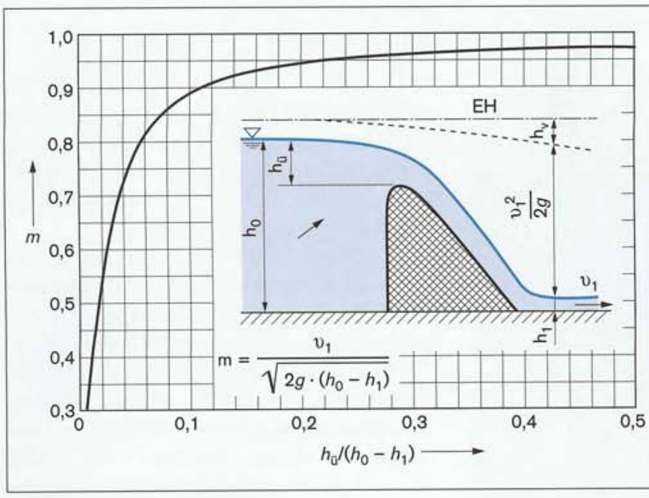


Bild 3

Abschätzung des Verlustbeiwertes (Abminderungs-faktors) m zur Ermittlung der Fließgeschwindig-keit v_1 am Fuße einer Staumauer mit einer Neigung von 1:0,6 bis 1:0,8 nach /2/

Iterationsfreie Lösung

Für die iterationsfreie Lösung wird neben dem Beiwert m von Peterka ein so genanntes Kontinuitätverhältnis n eingeführt:

Kontinuitätsverhältnis:

$$n = \frac{v_{1i}}{v_0} = \frac{h_0}{h_{1i}} \tag{5}$$

Für die reale, verlustbehaftete Strömung bedeutet der Beiwert m wegen dieser Kontinuität nicht nur eine Abminderung von v_1, sondern auch eine gleichzeitige Erhöhung von h_1.

Es gilt:

$$q = v_{1i} \cdot h_{1i} \left(v_{1i} \cdot m\right) \cdot \left(h_{1i}/m\right) = v_1 \cdot h_1 \tag{6}$$

Die Energiegleichung mit idealer Überströmung (verlustfrei), realer Überströmung und realer Überströmung unter Verwendung des Beiwertes m anstelle von h_V zeigt folgende Gleichung:

Energiegleichung:

$$\begin{aligned} h_E &= h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = h_{1i} + \frac{v_{1i}^2}{2g} \\ &= h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + h_V = h_1 \cdot m + \frac{v_1^2}{m^2 \cdot 2g} \end{aligned} \tag{7}$$

Aus der Kombination beider Gleichungen (5) und (7) ergibt sich als Ergebnis folgende Darstellung der Bernoulli-Gleichung:

$$h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{h_0}{n/m} + \frac{v_0^2}{2g} \cdot \left(n/m\right)^2 \tag{8}$$

Diese kann durch Umwandlung, z. B. mit

$$\frac{n/m}{h_0}$$

und Umstellung mit

$$Fr_0^2 = \frac{v_0^2}{g \cdot h_0},$$

in folgende Form überführt werden:

$$\left(n/m\right)^3 - \left(n/m\right) \cdot (1 + \frac{2}{Fr_0^2}) + \frac{2}{Fr_0^2} = 0 \tag{9}$$

Für diese Gleichung 3. Grades gibt es die einzig reale Lösung für n/m, die auch genauso mit Fr_1 ermittelt werden kann:

$$\begin{aligned} n/m &= \frac{1}{2}(\sqrt{1 + \frac{8}{Fr_0^2}} - 1) = \frac{Fr_1^2}{4}(\sqrt{1 + \frac{8}{Fr_1^2}} + 1) \\ m/n &= \frac{1}{2}(\sqrt{1 + \frac{8}{Fr_1^2}} - 1) = \frac{Fr_0^2}{4}(\sqrt{1 + \frac{8}{Fr_0^2}} + 1) \end{aligned} \tag{10}$$

Damit erfolgt die Berechnung des Kontinuitätsverhältnisses n unter Berücksichtigung eines Verlustbeiwertes m direkt aus dem Zufluss oder der Zuflussgeschwindigkeit, hier als dimensionslose Froudezahl dargestellt. Im Ergebnis werden ermittelt

$$h_0 = n \cdot h_1 \text{ und } v_0 = \frac{1}{n} \cdot v_1$$

bzw.

$$h_1 = \frac{1}{n} \cdot h_0 \text{ und } v_1 = n \cdot v_0$$

Beispiel:

Gegeben: $v_0 = 0{,}1$ m/s, $h_0 = 1$ m, $h_u = 0{,}13$ m aus Bild 2 mit $h_u/(h_0\text{-}h_1) \cong 0{,}13$ ergibt sich $m = 0{,}92$ mit

$$Fr_0^2 = \frac{0{,}1^2}{9{,}81 \cdot 1} = 0{,}0010194$$

Lösung mit Gleichung (10):

$$n/m = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + \frac{8}{0{,}0010194}} - 1) = 43{,}79$$

$$n = 43{,}797 \cdot m = 40{,}29$$

Ergebnisse:

$$h_1 = \frac{1\text{m}}{40{,}29} = 0{,}025\text{m und}$$

$$v_1 = 40{,}29 \cdot 0{,}1\text{m/s} = 4{,}03\text{m/s}$$

Fazit

In diesem Beitrag konnte gezeigt werden, dass eine iteratiosfreie Lösung für das Überströmen eines Wehres durch die Einführung eines Kontinuitätsverhältnisses n möglich ist und es wurde erstmals eine Lösung gezeigt, die einen Verlustbeiwert m mit berücksichtigen kann, wenn sein Einfluss unter Einbeziehung der Kontinuität nicht nur auf die Geschwindigkeit v_1 bzw. die Geschwindigkeishöhe, sondern auch auf die Wassertiefe h_1 berücksichtigt wird.

LITERATUR

/1/ Bollrich G. (2013): Technische Hydromechanik 1, Grundlagen. Berlin, Beuth Verlag, 2013, 7. Auflage

/2/ Peterka A. J. (1978): Hydraulic Design of Stilling Basins and Energy Dissipators. Denver Colorado), U.S. Dept. of the Interior, Bureau of Reclamation (U.S.B.R.)

KONTAKT

apl. Prof. Dr.-Ing. habil. Detlef Aigner
Hochschullehrer am Institut für Wasserbau und Technische Hydromechanik der TU Dresden
01062 Dresden
Tel.: 0351/46334725
E-Mail: detlef.aigner@tu-dresden.de